ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT
DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES A

COMMUNE AUX DEUX FILIERES
PHYSIQUE CHIMIE
PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DURÉE : 3 heures

N.B. : Ce *sujet comporte 3 pages de texte*

Les calculatrices sont interdites

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I

1. Montrer que pour n entier ≥ 2 et pour $x \in [0. + \infty[$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On définit alors sur $\mathbb{R}^+$ la fonction f_n par la formule :
$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \, dt.$
Etudier la continuité de f_n.

2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On définit alors la fonction f_1 sur $]0, +\infty[$ par la formule $f_1(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t} \, dt$. Etudier la continuité de f_1.

3. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, établir l'inégalité : $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x}$. En déduire la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par la formule :
$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k(x) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t} \, dt.$
a) Etablir l'encadrement :
$\forall k \geq 1, \forall x \in [0, +\infty[,\ \frac{2\mathrm{e}^{-(k+1)\pi x}}{(k+1)\pi} \leq |u_k(x)| \leq \frac{2\mathrm{e}^{-k\pi x}}{k\pi}.$
b) Montrer que la série de fonctions $x \mapsto \sum_{k \geq 0} u_k(x)$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série $\sum_{k\geq 0} |u_k|$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$, sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et, pour $a>0$, sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

c) Déduire de ce qui précède que la fonction f_1 définie à la question **2.** admet un prolongement par continuité en $x=0$. On continuera à nommer f_1 la fonction ainsi prolongée.

5. Pour quelles valeurs du réel α la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

II

Dans cette section, on détermine les fonctions f_n, définies dans la section I, pour les trois premières valeurs de n, au moyen de leurs dérivées.

1. Montrer que pour $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et que l'on a, pour $k \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n^{(k)}(x) = 0$ ($f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction f).

2. a) Trouver une expression simple de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Expliciter alors f_1 sur $[0,+\infty[$. Que vaut la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{\sin t}{t}\, dt$?

b) Calculer f_2''. En déduire une expression explicite de f_2 sur $[0,+\infty[$.

c) Exprimer f_3'' au moyen de la fonction f_1.

III

Dans cette section, on étudie certaines séries formées à partir des fonctions f_n définies dans la section I.

1. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = f_n(0)$. Prouver que la suite (a_n) converge vers 0.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_{2n}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ et exprimer sa somme sous forme d'une intégrale.

3. a) Etablir, pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ l'inégalité $\sin t \geq t - \dfrac{t^3}{6}$.

b) Pour $\alpha \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, prouver la relation $(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$.

c) Déduire de ce qui précède l'inégalité :

$\forall t \in \left]0.\dfrac{\pi}{2}\right], \forall n \geq 1,\ \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^n \geq 1 - \dfrac{nt^2}{6}$.

d) Démontrer qu'on a pour tout $n \geq 1$, l'inégalité $a_{2n} \geq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{9n^2}$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$.

4. Soit $x > 0$ fixé. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/n} \mathrm{e}^{-xt}\left(1-\frac{nt^2}{6}\right)dt$ et en donner un développement limité au premier ordre en puissances de $\dfrac{1}{n}$.

Montrer que pour $x \geq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n}(x)$ diverge. Que peut- on dire alors de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$?